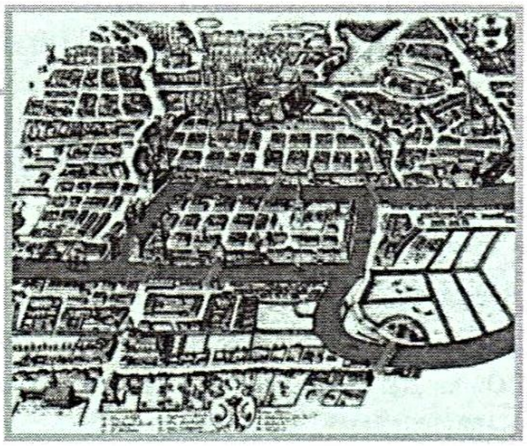
ГРАФИ И ДЪРВЕТА

26. Графи

Една от най-старите задачи, свързана с графи, е задачата за седемте моста, известна като задача за *Кьонигсбергските мостове* (фиг. 26.1). Тя е формулирана от Ойлер (Leonard Euler, 1701–1783) и е публикувана през 1736 г. С тази задача Ойлер отваря нова страница в дискретната математика и по-точно теория на графите. Задачата за Кьонигсбергските мостове ще бъде представена в следващия урок, а сега най-напред да въведем някои основни понятия, отнасящи се до графи.

Фиг. 26.1

Кьонингсбергски мостове



26. 1. Определение на граф. Примери

Определение 1

Всеки граф е крайно непразно множество от точки, наречени *върхове* (*възли*), свързани помежду си чрез линии. Линиите, свързващи върховете, се наричат *ребра*, а графът – *неориентиран граф*.

Има много случаи, при които графите се използват като модели на реални обекти и системи. Ето два такива примера.

Транспортни и комуникационни мрежи

На фиг. 26.2 е представена пътната мрежа в малко селище, за което се предполага, че пътищата са двупосочни. Върховете на графа (черните точките) представляват кръстовищата, а ребрата (линиите) – пътищата в селището.

Фиг. 26.2

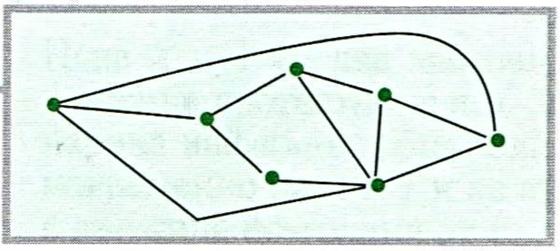


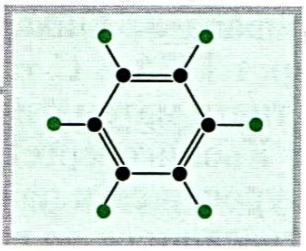
Схема на пътна мрежа

Авиолиниите, телефонните мрежи, компютърните мрежи и в частност Интернет мрежата са примери, чиито модели са графи.

Химични формули

Химичните формули са друг пример, в който се използват графи за представяне на строежа на химични елементи или на химични съединения. На фиг. 26.3 графично е представена химична формула като граф, чиито върхове са атомите на водорода и въглерода, а ребрата представляват валентните връзки.

Фиг. 26.3



Формула на бензола, представена като граф

26. 2. Основни понятия за графи

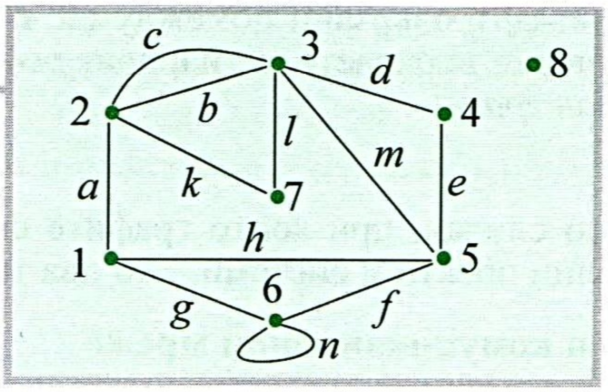
С графите са свързани твърде много понятия. Тук обаче ще се ограничим само до най-често използваните. За целта ще използваме графа от фиг. 26.4. Този граф има 8 върха, означени с числа, и 12 ребра, означени с букви.

Ребрата могат да се разглеждат като двойка върхове. Например реброто *a* е определено с двойката **(1, 2)**. Двойката **(2, 1)** определя същото ребро. С други думи, двойките върхове, определящи ребрата, не са наредени.

Степен на връх

Броят на ребрата, с които даден връх е свързан с другите върхове, се нарича *степен на върха*. Например връх **2** е от степен 4, връх **3** е от степен 5, а връх **8** е от степен 0.

Фиг. 26.4



Граф с 8 върха и 12 ребра

Изолиран връх

Връх от степен 0 се нарича *изолиран връх*. Връх **8** е такъв.

Паралелни ребра

Понякога два върха могат да бъдат свързани с повече от едно ребра. Такива ребра се наричат *паралелни*. Например върховете **2** и **3** са свързани с паралелните ребра b и c. Графи, които съдържат паралелни ребра, се наричат *мултиграфи*. Мултиграфи например представляват много телефонни мрежи, в които често има дублиране на връзките между отделни възли. Това до голяма степен разрешава проблема с натоварения трафик.

Примка

Дъга, която свързва един и същ връх, се нарича *примка*. Връх **6** има примка. Това е реброто n. Връх **6** е от степен 4.

★★★

Две свойства на неориентираните графи

Теорема 1 Нека G е произволен неориентиран граф с m върха и n ребра. Означаваме с d_i степента на i-тия връх, $i = 1, 2, ..., m$. В сила е следната зависимост:

$d_1 + d_2 + ... + d_m = 2n$.

Теорема 2 Всеки неориентиран граф има четен брой върхове от нечетна степен.

Няма да разглеждаме доказателствата на тези теореми, макар да не са сложни, а само ще ги илюстрираме с примери върху графа от фиг. 26.4:

- **Т1**: Сборът от степените на отделните върхове е: $3 + 4 + 5 + 2 + 4 + 4 + 2 = 24$.

Броят на ребрата е 12, т.е. $24 = 2.12$.

- **Т2**: Само върхове **1** и **3** са от нечетна степен. Всички останали са от четна степен.

26. 3. Ориентирани графи

Граф, в който ребрата са ориентирани, се нарича *ориентиран граф*. Ориентирани ребра са тези, при които се прави разлика кой връх е начален и кой е краен. Ако r е ребро, определено от върховете v_1 и v_2, то двойката $<v_1, v_2>$ е наредена и е различна от двойката $<v_2, v_1>$.

Определение 2

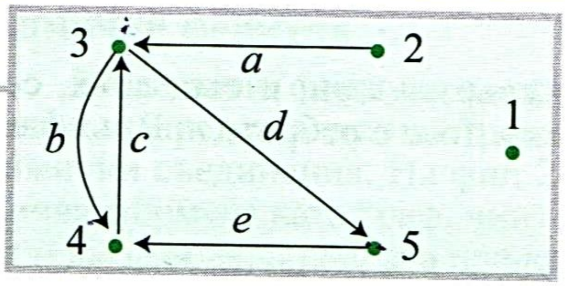
Ориентираният граф G е двойка множества $<V, R>$, където V е непразно крайно множество от елементи, наречени *върхове* (*възли*) на графа, а R е бинарна релация, дефинирана във V, т.е. $R \subseteq V \times V$. Елементите на R се наричат *дъги* на графа G. Графично върховете се представят като точки, а дъгите като стрелки.

Един пример на ориентиран граф е даден на фиг. 26.5. Той се състои от 5 върха и 5 дъги. Връх **1** е изолиран, а между върховете **3** и **4** има дъги в двете посоки. Това съответства на ребро в неориентиран граф. Всъщност всеки неориентиран граф може да се разглежда като ориентиран, в който всяко ребро се заменя с двойка противоположни дъги. Това е и причината, поради която по-нататък се предполага, че графите са ориентирани.

Ако $a \in R$ е произволна дъга в даден граф G, със $s(a)$ означаваме нейния *начален* връх, а с $t(a)$ – *крайния* ѝ връх.

Фиг. 26.5

Ориентиран граф



Път

Път с начало d_1 и край d_k в графа G е редица от дъги $<d_1, d_2, ..., d_k>$ такава, че $t(d_i) = s(d_{i+1})$, $1 \le i \le k-1$. Броят на дъгите в пътя определя неговата *дължина*.

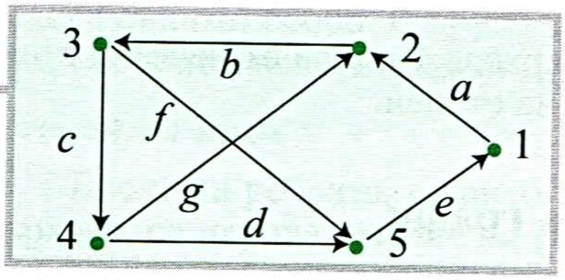
Например между върховете **3** и **5** на графа от фиг. 26.5 могат да се посочат два пътя:

- $<d>$ с дължина 1;
- $<b, c, d>$ с дължина 3.

Всъщност между върховете **3** и **5** съществуват безкрайно много пътища, защото върховете **3** и **5** са свързани с две противоположни дъги. Последователността от дъги $<b, c, b, c, b, c, b, c, d>$ е един от възможните други пътища.

Фиг. 26.6

Граф с цикли



Между върховете **2** и **4** също има няколко пътя: $<a, b>$, $<a, b, c, b, c, b>$, $<a, b, c, d, e>$. Последният от тях е най-дългият, в който няма повтарящи се дъги.

Всеки път в граф без паралелни ребра може да се определи и с редица от върхове. Например пътят $<b, c, d>$ от фиг. 26.6 е определен и с върховете <**2**, **3**, **4**, **5**>.

Път, в който няма повтарящи се дъги, се нарича *прост път*.

Цикъл

Път, чиито начален и краен връх съвпадат, се нарича *цикъл*. Графът от фиг. 26.6 съдържа няколко цикъла: $<a, b, c, d, e>$, $<a, b, f, e>$, $<b, c, g>$. Ако един граф е без цикли, той се нарича *ацикличен граф*.

27. Обхождане на графи

27. 1. Свързаност

Свързаността е понятие, което се отнася за пътища в графите. Така графите могат да се разглеждат като свързани или несвързани.

Свързан ориентиран граф

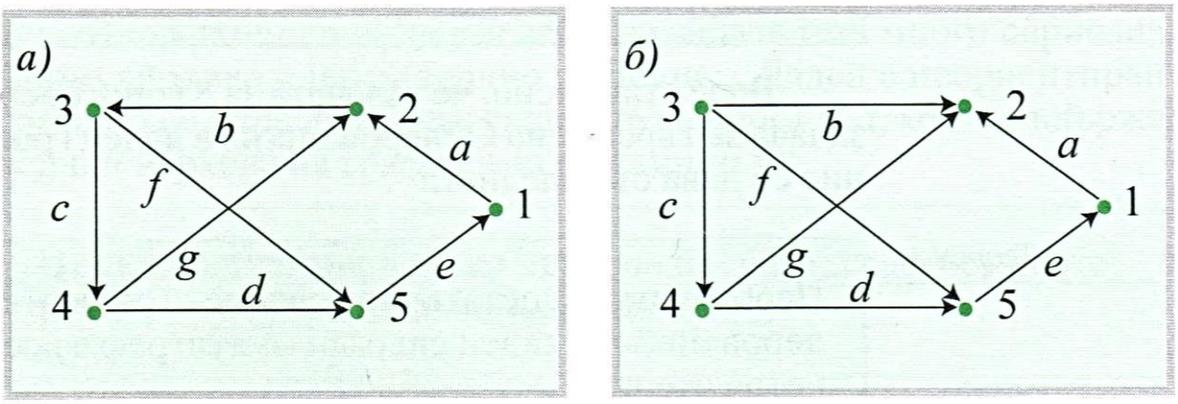
Определение 1

Ориентираният граф G се нарича *свързан*, ако за всяка двойка върхове v_1 и v_2 съществуват пътища от v_1 до v_2 и от v_2 до v_1.

Графът от фиг. 27.1а е свързан ориентиран граф, защото между всеки два върха съществува път и в двете посоки. Например между върховете **2** и **5** съществуват следните два пътя: <**2**, **3**, **4**, **5**> и <**5**, **1**, **2**>. Обаче графът от фиг. 27.1б, който е твърде подобен на този от фиг. 27.1а, не е свързан, тъй като не съществува например път от **2** до **5**.

Фиг. 27.1 а б

Свързан ориентиран граф



Свързан неориентиран граф

Определение 2

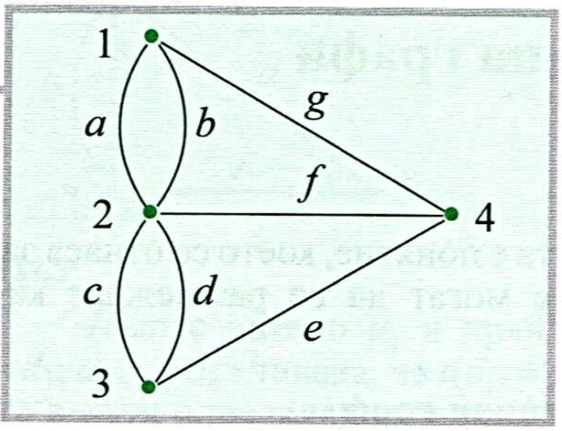
Неориентираният граф се нарича *свързан*, ако всеки два негови върха са свързани.

Кьонигсбергски мостове

Задачата за Кьонигсбергските мостове е следната (вж. фиг. 26.1): Гражданите от Кьонигсберг обичали много да се разхождат през почивните дни из двата острова и по свързващите ги 7 моста. И така, незнайно кога и от кого възникнал въпросът дали е възможно да се тръгне от една точка на града, да се мине през седемте моста само по веднъж и отново да се стигне до началната точка.

Фиг. 27.2

Граф на Кьонигсбергските мостове



На фиг. 27.2 е даден граф, представляващ модел на задачата. Мостовете са представени с ребрата, а островите – с върховете **2** и **4**. Върховете **1** и **3** представляват двата бряга на реката.

Докато авторът на задачата не е известен, то знае се, че авторът на нейното решение е Леонард Ойлер. В съвременен вид задачата може да се преформулира така:

Даден е неориентираният граф от фиг. 27.3. Да се определи дали съществува път, който съдържа всичките ребра на графа, но само по веднъж.

Определение 3

Цикъл, в който няма повтарящи се ребра, е *прост цикъл*. Прост цикъл, съдържащ всички ребра, се нарича *Ойлеров цикъл*.

Вече става ясно, че задачата за Кьонигсбергските мостове е задача за търсене на Ойлеров цикъл в даден граф. Нейното решение са дава със следната

Теорема

Необходимо и достатъчно условие за съществуването на Ойлеров цикъл в даден свързан мултиграф е всеки връх да е от четна степен.
От тази теорема следва, че отговорът на задачата за Кьонигсбергските мостове е отрицателен. Както непосредствено се проверява, степента на връх **3** е нечетно число, което е достатъчно, за да се твърди, че графът от фиг. 27.3 не съдържа Ойлеров цикъл.

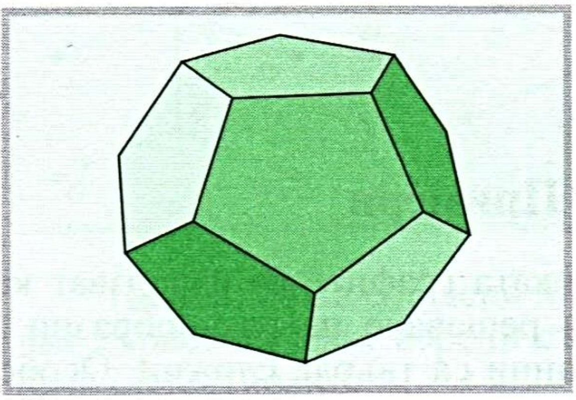
Хамилтънов пъзел

Додекаедърът е правилно геометрично тяло, състоящо се от 12 правилни петоъгълника (фиг. 27.3). През 1859 г. Хамилтън (William Hamilton, Ireland: 1805–1865) именувал всеки един от 20-те върха на додекаедъра с име на град и формулирал следната забавна

Задача: Да се построи път, който тръгва от произволен град, минава през всички останали 19 града само по веднъж и се връща отново в началния град.

Фиг. 27.3

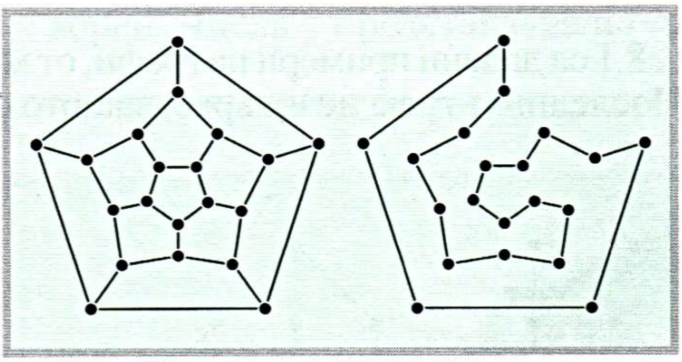
Додекаедър



Равнинният вариант на този пъзел е даден на фиг. 27.4. Той представлява граф, съдържащ 20 върха и 25 ребра. Естествено дължините на ребрата в случая не са интересни. Съществени са само върховете и връзките между тях.

Фиг. 27.4

Додекаедър, представен като граф и съдържащ Хамилтънов път



В съвременен вид тази забавна задача има много сериозна формулировка и нетривиално решение: „Даден е неориентиран граф. Да се определи дали съществува прост път, който съдържа всички върхове на графа само по един път."

Определение 3

> Цикъл, съдържащ всички върхове на даден граф без повторение, се нарича *Хамилтънов цикъл*.

Вече става ясно, че задачата за Хамилтъновия пъзел е задача за търсене на Хамилтънов цикъл в даден граф. Някои варианти на тази задача, известни като обхождане на граф, намират широко приложение.

Обхождане на граф

Обхождането на граф е процедура, с която се „посещават" всички върхове на даден граф. Съществуват различни методи, които решават задачата за обхождане на граф.